交通流の数理モデルとソリトン方程式 : 可積分系から渋滞学へ (可積分数理の新潮流)

金井, 政宏

数理解析研究所講究録
第1650巻2009年87-100

交通流の数理モデルとソリトン方程式 ～可積分系から渋滞学へ～

東京大学大学院数理科学研究科　金井 政宏 (Masahiro Kanai)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1 はじめに

交通流モデルは，ミクロ・マクロ，連続・離散，決定論的・確率論的，などと分類される．この中で，個体間に非対称な相互作用を考える追従型 (Car-following) モデルは，力学の大前提である運動の3法則に縛られない粒子の系として交通流をモデル化していて，交通流を既存の物理系から独立した新たな対象としている．

しかし一方で，相互作用の非対称性のために保存則は見出されずエントロピーによる平衡統計力学の適用範囲外となる．このような状況では，厳密解がマクロな現象の解明のために非常に有効である．通常，厳密解は極めて特殊な状況でのみ実現されるものであって，ほとんど有効性を示さないが，交通流モデルにおいては，シミュレーションにより厳密解が系の定常状態を与えていると予想される．このため交通流モデルのセル・オートマトン化は方程式の「良い性質」を保ったまま行うことが重要となる．

本研究では，交通流の基本的モデルである最適速度モデル [1, 2] の超離散化を，modified KdV 方程式のそれ [3] と関連付けて行う．最適速度モデルとは2階連続微分方程式系で与えられる交通流モデルであるが，連続極限において mKdV 方程式に帰着されることが知られており [4]，今回の超離散化により実用的なセル・オートマトンモデルに変換される．

2 Optimal Velocity model and delay OV model

時刻 t での，n 番目の車の位置を $x_n(t)$，先行する車（$n+1$ 番）との車間距離を $h_n(t)$ とする．車間距離 h に対して最適な速度を返す函数 $V(h)$（最適速度 (OV) 函数）により

定義される時間遅れ最適速度モデル (delay OV model):

$$\dot{x}_n(t+\tau) = V(h_n), \qquad h_n := x_{n+1} - x_n \tag{2.1}$$

において，

$$\dot{x}_n(t+\tau) \sim \dot{x}_n(t) + \ddot{x}_n(t)\tau + O(\tau^2) \tag{2.2}$$

と展開し，$\tau \sim 0$ として２次以上を切り捨てることによって OV model

$$\ddot{x}_n = a[V(h_n) - \dot{x}_n] \qquad (a = 1/\tau) \tag{2.3}$$

を得る．

2.1 delay optimal velocity model

delay OV model を車間距離 h_n のみの式に書き直す：

$$\dot{h}_n(t+\tau) = V(h_{n+1}) - V(h_n) \tag{2.4}$$

そして，OV 関数を

$$V(h_n) = \tanh(h_n - c) + \tanh c = f(h_n) - f(0), \qquad f(h) = \tanh(h-c) \tag{2.5}$$

として，

$$g_n = f(h_n) = \tanh(h_n - c) = V(h_n) - \tanh c \tag{2.6}$$

とすれば

$$\dot{g}_n = f'(h_n)\dot{h}_n = (1 - \tanh^2(h_n - c))\dot{h}_n = (1 - f(h_n)^2)\dot{h}_n = (1 - {g_n}^2)\dot{h}_n \tag{2.7}$$

であるから，$g_n(t \pm \tau) = g_n^{\pm}$ と略記することにより，

$$\dot{g}_n^{+} = (1 - (g_n^{+})^2)(g_{n+1} - g_n), \qquad g_n(t) := \tanh(h_n(t) - c) \tag{2.8}$$

あるいは

$$\dot{g}_n = (1 - (g_n)^2)(g_{n+1}^{-} - g_n^{-}) \tag{2.9}$$

となる．これを semi-discrete OV model と呼ぶことにする．

2.1.1 sd OV model の進行波楕円解

sd OV model に対して進行波

$$g_n(t) = G(u) = G(2n + vt) \qquad (u = 2n + vt,\ v\tau = 1) \tag{2.10}$$

と仮定すると，

$$\dot{g}_n = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u}(u) = vG'(u) = (1 - G(u)^2)[G(u+1) - G(u-1)] \tag{2.11}$$

すなわち，

$$vG'(u) = (1 - G(u)^2)[G(u+1) - G(u-1)], \qquad (u = 2n + vt,\ v\tau = 1) \tag{2.12}$$

ここで，楕円の公式

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{sn}\,u = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u \tag{2.13}$$

を用いて

$$\mathrm{sn}(u+v) - \mathrm{sn}(u-v) = \frac{2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v} = \frac{2\,\mathrm{sn}\,v\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{sn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v} \tag{2.14}$$

であるから，

$$2\,\mathrm{sn}\,\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,x) = (1 - (k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,x)^2)(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}(x+\alpha) - k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}(x-\alpha)) \tag{2.15}$$

より $x = \alpha u$ とすれば

$$G(u) = k\,\mathrm{sn}(\alpha;k)\,\mathrm{sn}(\alpha u;k), \qquad \frac{2\,\mathrm{sn}(\alpha;k)}{\alpha} = v = \frac{1}{\tau} \tag{2.16}$$

を得る．方程式の符号反転対称性から，sd OV model の進行波解

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \pm\, k\,\mathrm{sn}(\alpha;k)\,\mathrm{sn}\left(\alpha\,(2n+vt)\,;\,k\right) = \pm\frac{k\alpha}{2\tau}\,\mathrm{sn}\left(\alpha\left(2n + \frac{t}{\tau}\right);\,k\right) \\ &= \pm\, k\,\mathrm{sn}(\alpha;k)\,\mathrm{sn}\left(2\alpha n + 2\,\mathrm{sn}(\alpha;k)\,t;\,k\right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

が得られる．ここで，母数 k と波数 α が free parameter になる．

特に $k = 1$ とすると

$$g_n(t) = -\tanh(\alpha)\tanh(2\alpha n + 2\tanh(\alpha)t) \tag{2.18}$$

これは，衝撃波を表す．ただし，交通流の衝撃波解として負を採用した．

3 Ultra-discrete mKdV equation とその衝撃波解

3.1 Ultra-discrete mKdV equation

まず，高橋・松木平 [3] に従って ultra-discrete mKdV 方程式を構成する．

辻本・広田 [5] により提案された full discrete mKdV 方程式

$$v_j^{t+1}\frac{1+\delta v_{j+1}^{t+1}}{1+av_j^{t+1}} = v_j^t\frac{1+\delta v_{j-1}^t}{1+av_j^t} \tag{3.1}$$

において，

$$v_j^t = r_j(-\delta t), \qquad \delta \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

とすると，semi-dicrete mKdV 方程式

$$\dot{r}_j = r_j(1+ar_j)(r_{j+1}-r_{j-1}) \tag{3.3}$$

を得る．さらに，

$$r_j = -\frac{1}{2a} + \sqrt{-1}\varepsilon s\left((j-\frac{1}{2a}t)\varepsilon, \frac{\varepsilon^3}{3}t\right), \qquad \varepsilon \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

とすれば，mKdV 方程式

$$s_t + 6as^2s_x + \frac{1}{4a}s_{xxx} = 0 \tag{3.5}$$

を得る．

今度は，fd mKdV 方程式において

$$\widetilde{v}_j^t := \frac{v_j^t}{1+av_j^t} \tag{3.6}$$

として，

$$\widetilde{v}_j^{t+1}\frac{1+(\delta-a)\widetilde{v}_{j+1}^{t+1}}{1-a\widetilde{v}_{j+1}^{t+1}} = \widetilde{v}_j^t\frac{1+(\delta-a)\widetilde{v}_{j-1}^t}{1-a\widetilde{v}_{j-1}^t} \tag{3.7}$$

と変形する．ここで，

$$\widetilde{v}_j^t = \exp\frac{V_j^t}{\varepsilon}, \qquad \delta = \exp\frac{-L_j^t}{\varepsilon}, \qquad a = -\exp\frac{-M_j^t}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \longrightarrow +0 \tag{3.8}$$

として $L < M$ の場合を考えれば，ultra-discrete mKdV 方程式

$$V_j^{t+1} + \max(0, V_{j+1}^{t+1} - L) - \max(0, V_{j+1}^{t+1} - M) = V_j^t + \max(0, V_{j-1}^t - L) - \max(0, V_{j-1}^t - M) \quad (3.9)$$

を得る.

3.2 Shock solution (Kink)

3.2.1 Kink solution of the mKdV equation

まず，mKdV 方程式

$$s_t + 6as^2 s_x + \frac{1}{4a} s_{xxx} = 0 \quad (3.10)$$

に対して

$$s(x,t) = \alpha f, \qquad f = \tanh\phi, \qquad \phi = x - ct \quad (3.11)$$

とすれば，$f' = 1 - f^2$ に注意して

$$s_t = \alpha f' \phi_t = -\alpha c f' = -\alpha c(1 - f^2), \qquad s_x = \alpha f' \phi_x = \alpha(1 - f^2) \quad (3.12)$$

$$s_{xx} = -2\alpha f f' = -2\alpha f(1 - f^2), \quad s_{xxx} = -2\alpha(f' - 3f^2 f') = -2\alpha(1 - f^2)(1 - 3f^2) \quad (3.13)$$

より

$$\left(c + \frac{1}{2a}\right) - \left(6a\alpha^2 + \frac{3}{2a}\right) f^2 = 0 \quad (3.14)$$

よって，

$$c = -\frac{1}{2a}, \qquad 6a\alpha^2 + \frac{3}{2a} = 0 \quad \therefore \ \alpha = \pm\frac{\sqrt{-1}}{2a} \quad (3.15)$$

から kink 解

$$s(x,t) = \pm\frac{\sqrt{-1}}{2a} \tanh(x + \frac{1}{2a} t) \quad (3.16)$$

を得る.

3.2.2 Kink solution of the sd mKdV equation

次に，sd mKdV 方程式

$$\dot{r}_j = r_j(1+ar_j)(r_{j+1}-r_{j-1}) \tag{3.17}$$

に対して進行波を仮定して

$$r_j(t) = \gamma + \beta f, \qquad f = \tanh\phi, \qquad \phi = \alpha j + ct \tag{3.18}$$

とおくと，

$$\dot{r}_j = \beta\phi_t f' = \beta c(1-f^2) \tag{3.19}$$

$$r_{j+1} - r_{j-1} = \beta\frac{2(1-f^2)\tanh\alpha}{1-f^2\tanh^2\alpha} \tag{3.20}$$

から

$$\begin{aligned}\beta c(1-f^2) =& (\gamma+\beta f)[1+a(\gamma+\beta f)]\beta\frac{2(1-f^2)\tanh\alpha}{1-f^2\tanh^2\alpha}\\ \frac{c}{2\tanh\alpha}(1-f^2\tanh^2\alpha) =& \gamma(1+a\gamma) + [\beta(1+a\gamma)+a\beta\gamma]f + a\beta^2 f^2\end{aligned} \tag{3.21}$$

よって，

$$\frac{c}{2\tanh\alpha} = \gamma(1+a\gamma), \qquad 1+2a\gamma = 0, \qquad -c\tanh\alpha = a\beta^2 \tag{3.22}$$

から

$$\gamma = -\frac{1}{2a}, \qquad \beta = \pm\frac{\tanh\alpha}{2a}, \qquad c = -\frac{\tanh\alpha}{2a} \tag{3.23}$$

よって，kink 解

$$r_j(t) = -\frac{1}{2a} \pm \frac{\tanh\alpha}{2a}\tanh\left(\alpha j - \frac{\tanh\alpha}{2a}t\right) \tag{3.24}$$

を得る．

また，特に $\alpha \sim 0$ を考えると，$\tanh\alpha = \alpha - \alpha^3/3 + \cdots$ に注意して

$$r_j(t) = -\frac{1}{2a} \pm \frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \cdots}{2a}\tanh\left((j - \frac{1}{2a}t)\alpha + \frac{t}{6a}\alpha^3 + \cdots\right) \tag{3.25}$$

であるから，この解が continuous mKdV 方程式の kink 解に対応することは明らかだろう．

3.2.3 Kink solution of the full discrete mKdV equation

最後に，丸野・梶原・中尾・及川 [6] に従い，tau 函数表示

$$v_j^t = \beta \frac{\kappa_{j-2}^{t-1}\sigma_j^t}{\kappa_{j-1}^{t-1}\sigma_{j-1}^t} \tag{3.26}$$

を用いて fd mKdV 方程式

$$v_j^{t+1}\frac{1+\delta v_{j+1}^{t+1}}{1+av_j^{t+1}} = v_j^t \frac{1+\delta v_{j-1}^t}{1+av_j^t} \tag{3.27}$$

の kink 解を求める．

まず，

$$\kappa_j^t = 1 + K^j L^t, \qquad \sigma_j^t \equiv 1 \tag{3.28}$$

と置く．すなわち，

$$v_j^t = \beta \frac{\kappa_{j-2}^{t-1}}{\kappa_{j-1}^{t-1}} = \beta \frac{1+L^{t-1}K^{j-2}}{1+L^{t-1}K^{j-1}} \tag{3.29}$$

とする．先に変形しておくと便利である:

$$\begin{aligned} a\delta v_j^{t+1}v_j^t[v_{j+1}^{t+1}-v_{j-1}^t]+\delta[v_{j+1}^{t+1}v_j^{t+1}-v_{j-1}^t v_j^t]+v_j^{t+1}-v_j^t &=0 \\ a\delta\beta^2\kappa_{j-2}^t\left[\kappa_{j-2}^{t-1}\kappa_{j-1}^t-\kappa_{j-3}^{t-1}\kappa_j^t\right]+\delta\beta\kappa_{j-1}^t\left[\kappa_{j-2}^t\kappa_{j-1}^{t-1}-\kappa_{j-3}^{t-1}\kappa_j^t\right]+\kappa_j^t\left[\kappa_{j-2}^t\kappa_{j-1}^{t-1}-\kappa_{j-2}^{t-1}\kappa_{j-1}^t\right] &=0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

ここで，

$$\kappa_j^t = 1 + K^j L^t \tag{3.31}$$

を代入する．$X = K^j L^t$ と略記して

$$a\delta\beta^2(LK^2-1)(1+K^{-2}X)+\delta\beta(K+1)(LK-1)(1+K^{-1}X)+K(L-1)(1+X)=0 \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} &[a\delta\beta^2(LK^2-1)+\delta\beta K(K+1)(LK-1)+K^3(L-1)]K^{-2}X \\ &\quad + a\delta\beta^2(LK^2-1)+\delta\beta(K+1)(LK-1)+K(L-1)=0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

よって，各係数を 0 として

$$\begin{aligned} &a\delta\beta^2(LK^2-1)K^{-2}+\delta\beta(K+1)(LK-1)K^{-1}+K(L-1)=0 \\ &a\delta\beta^2(LK^2-1)+\delta\beta(K+1)(LK-1)+K(L-1)=0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

であるから，δ, a, K をパラメータと考えて L, β を表す:

$$L = \frac{-(K^2 - 2\gamma K + 1) \pm (K-1)\sqrt{(K+1)^2 - 4\gamma K}}{2(\gamma - 1)K^2} \tag{3.35}$$

ここで，$\gamma = 0$ を考えると，

$$L = \frac{(K^2+1) \pm (K-1)(K+1)}{2K^2} = 1, \frac{1}{K^2} \tag{3.36}$$

だから，$\delta \longrightarrow 0$ のとき $L \longrightarrow 1/K^2$ とすると β が発散するので，$L \longrightarrow 1$ となる方を採用する．以降

$$L = \frac{(K^2 - 2\gamma K + 1) + (K-1)\sqrt{(K+1)^2 - 4\gamma K}}{2(1-\gamma)K^2} = 1 + \frac{K-1}{K+1}\frac{\delta}{a} + O(\delta^2) \tag{3.37}$$

とする．このとき，

$$\beta = \frac{-K - 1 + \sqrt{(K+1)^2 - 4K\delta/a}}{2\delta} = -\frac{K}{a(K+1)} - \frac{K^2}{a^2(1+K)^3}\delta + O(\delta^2) \tag{3.38}$$

これで，ud mKdV 方程式の kink 解が求まった．

さらに，

$$v_j^t = -\frac{1}{2a}\frac{(LK-1)(K+1)}{LK^2-1}\left[1 - \frac{K-1}{K+1}\frac{L^{t-1}K^{j-1}-1}{L^{t-1}K^{j-1}+1}\right] \tag{3.39}$$

としておいて，

$$L \stackrel{\delta \to 0}{\longrightarrow} 1 \tag{3.40}$$

$$L^{1/\delta} = \left(1 + \frac{K-1}{K+1}\frac{\delta}{a} + O(\delta^2)\right)^{1/\delta} \stackrel{\delta \to 0}{\longrightarrow} \exp\frac{K-1}{a(K+1)} \tag{3.41}$$

に注意すると，$K = \mathrm{e}^{2\alpha}$ と置くことにより，

$$\lim_{\delta \to 0} v_j^{-t/\delta} = -\frac{1}{2a} + \frac{\tanh\alpha}{2a}\tanh\left(\alpha(j-1) - \frac{\tanh\alpha}{2a}t\right) \tag{3.42}$$

と $r_j(t)$ の解が再現される．

同様にして，

$$\kappa_j^t \equiv 1, \quad \sigma_j^t = 1 + K^j L^t \tag{3.43}$$

すなわち，

$$v_j^t = \beta \frac{\sigma_j^t}{\sigma_{j-1}^t} = \beta \frac{1 + L^t K^j}{1 + L^t K^{j-1}} \tag{3.44}$$

と置いて特解を求めると

$$L = \frac{K^2 - 2\gamma K + 1 + (K-1)\sqrt{(K+1)^2 - 4\gamma K}}{2K^2(1-\gamma)} = 1 + \frac{K-1}{K+1}\frac{\delta}{a} + O(\delta^2) \tag{3.45}$$

$$\beta = -\frac{2}{a\left(1 + K + \sqrt{(1+K)^2 - 4\gamma K}\right)} = -\frac{1}{a(1+K)} - \frac{K}{a^2(1+K)^3}\delta + O(\delta^2) \tag{3.46}$$

ただし，$\gamma = \delta/a$ である．また，

$$\begin{aligned} v_j^t &= -\frac{1}{2a}\frac{(LK-1)(K+1)}{K^2L - 1}\left[1 + \frac{K-1}{K+1}\frac{L^t K^{j-1} - 1}{L^t K^{j-1} + 1}\right] \\ &\xrightarrow{\delta \to 0} -\frac{1}{2a}\left[1 + \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}\frac{\exp\left(2\alpha(j-1) - \frac{e^{2\alpha}-1}{e^{2\alpha}+1}\frac{t}{a}\right) - 1}{\exp\left(2\alpha(j-1) - \frac{e^{2\alpha}-1}{e^{2\alpha}+1}\frac{t}{a}\right) + 1}\right] \\ &= -\frac{1}{2a} - \frac{\tanh\alpha}{2a}\tanh\left(\alpha(j-1) - \frac{\tanh\alpha}{2a}t\right) \end{aligned} \tag{3.47}$$

を得る．

4 Ultra-discrete Optimal Velocity model

4.1 full discrete Optimal Velocity model

delay OV model の衝撃波解

$$g_n(t) = -\tanh(\alpha)\tanh(2\alpha n + 2\tanh(\alpha)t) \tag{4.1}$$

と sd mKdV 方程式の kink 解

$$r_j(t) = -\frac{1}{2a}\left[1 \pm \tanh\alpha \tanh\left(\alpha j - \frac{\tanh\alpha}{2a}t\right)\right] \tag{4.2}$$

を比べて，まず sd mKdV 方程式において

$$r_j(t) = -\frac{1}{2a}(1 + \bar{r}_j) \tag{4.3}$$

とすると，sd-mKdV 方程式

$$\dot{r}_j = r_j(1 + ar_j)(r_{j+1} - r_{j-1}) \tag{4.4}$$

は

$$-4a\dot{\bar{r}}_j = (1 - \bar{r}_j^2)(\bar{r}_{j+1} - \bar{r}_{j-1}) \tag{4.5}$$

となる．このとき，kink 解は

$$\bar{r}_j(t) = \mp \tanh\alpha \tanh\left(\alpha j - \frac{\tanh\alpha}{2a}t\right) \tag{4.6}$$

に写る．

一方，fd mKdV 方程式でも同じ変換を施すと，

$$v_j^t = -\frac{1}{2a}(1 + \bar{v}_j^t) \tag{4.7}$$

$$\widetilde{v}_j^t = \frac{v_j^t}{1 + av_j^t} = -\frac{1}{a}\frac{1 + \bar{v}_j^t}{1 - \bar{v}_j^t}, \qquad \bar{v}_j^t = \frac{a\widetilde{v}_j^t + 1}{a\widetilde{v}_j^t - 1} \tag{4.8}$$

従って

$$\begin{aligned} v_j^{t+1}\frac{1 + \delta v_{j+1}^{t+1}}{1 + av_j^{t+1}} &= v_j^t\frac{1 + \delta v_{j-1}^t}{1 + av_j^t} \\ \frac{4a - 2\delta}{\delta}[\bar{v}_j^{t+1} - \bar{v}_j^t] &= (1 - \bar{v}_j^t)(1 - \bar{v}_j^{t+1})\bar{v}_{j+1}^{t+1} - (1 - \bar{v}_j^{t+1})(1 + \bar{v}_j^t)\bar{v}_{j-1}^t \end{aligned} \tag{4.9}$$

よって，fd mKdV 方程式として

$$\frac{4a - 2\delta}{\delta}(\bar{v}_j^{t+1} - \bar{v}_j^t) = (1 - \bar{v}_j^t)(1 + \bar{v}_j^{t+1})\bar{v}_{j+1}^{t+1} - (1 - \bar{v}_j^{t+1})(1 + \bar{v}_j^t)\bar{v}_{j-1}^t \tag{4.10}$$

という変形を得る．これは

$$\bar{v}_j^t = \bar{r}_j(-\delta t), \qquad \delta \longrightarrow 0 \tag{4.11}$$

とすると，確かに sd mKdV 方程式

$$-4a\dot{\bar{r}}_j = (1 - \bar{r}_j^2)(\bar{r}_{j+1} - \bar{r}_{j-1}) \tag{4.12}$$

に帰着される．

そこで，

$$a = -\frac{1}{4} \tag{4.13}$$

とする．これに伴い sd mKdV 方程式は

$$\dot{\bar{r}}_j = (1 - \bar{r}_j^2)(\bar{r}_{j+1} - \bar{r}_{j-1}) \tag{4.14}$$

となる．そして fd mKdV 方程式は

$$\frac{-1-2\delta}{\delta}(\bar{v}_j^{t+1} - \bar{v}_j^t) = (1 - \bar{v}_j^t)(1 + \bar{v}_j^{t+1})\bar{v}_{j+1}^{t+1} - (1 - \bar{v}_j^{t+1})(1 + \bar{v}_j^t)\bar{v}_{j-1}^t \tag{4.15}$$

となる．

delay OV model

$$\dot{g}_n = (1 - g_n{}^2)\left[g_{n+1}(t-\tau) - g_n(t-\tau)\right] \tag{4.16}$$

からの簡約は

$$g_n(t-\tau) = g_{n-1/2}(t) \qquad (\forall n) \tag{4.17}$$

であった．これは sd mKdV 方程式では

$$\bar{r}_j(-\delta t - \tau) = \bar{r}_{j-1}(-\delta t) \tag{4.18}$$

に対応すると考える．以上から，full discrete の場合に

$$-\delta = \tau, \qquad \bar{v}_j^{t-1} = \bar{v}_{j-1}^t \tag{4.19}$$

という簡約に対応していると考える．よって，簡約を解除するために，fd mKdV 方程式

$$\frac{4a-2\delta}{\delta}(\bar{v}_j^{t+1} - \bar{v}_j^t) = (1 - \bar{v}_j^t)(1 + \bar{v}_j^{t+1})\bar{v}_{j+1}^{t+1} - (1 - \bar{v}_j^{t+1})(1 + \bar{v}_j^t)\bar{v}_{j-1}^t \tag{4.20}$$

において変数を

$$a = -\frac{1}{4}, \qquad \delta = -\tau, \tag{4.21}$$

$$\bar{v}_{j-1}^t = \bar{v}_j^{t-1} \longrightarrow u_n^{t-1}, \qquad \bar{v}_j^t \longrightarrow u_n^t, \qquad \bar{v}_{j+1}^{t+1} = \bar{v}_{j+2}^t \longrightarrow u_{n+1}^t \tag{4.22}$$

と置き換えて，

$$\frac{1-2\tau}{\tau}(u_n^{t+1} - u_n^t) = (1 - u_n^t)(1 + u_n^{t+1})u_{n+1}^t - (1 - u_n^{t+1})(1 + u_n^t)u_n^{t-1} \tag{4.23}$$

を以って **full discrete OV model** とする．

fd OV model を変形する．$\mu = (1-2\tau)/\tau$ として，

$$u_n^{t+1} = \frac{u_{n+1}^t - u_n^{t-1} + (\mu - u_{n+1}^t - u_n^{t-1})u_n^t}{\mu - u_{n+1}^t - u_n^{t-1} + (u_{n+1}^t - u_n^{t-1})u_n^t} \tag{4.24}$$

を得る．これは発展方程式の形をしているので計算可能．

4.2 Ultra-discrete OV model

ud mKdV 方程式は fd mKdV 方程式

$$\tilde{v}_j^{t+1}\frac{1+(\delta-a)\tilde{v}_{j+1}^{t+1}}{1-a\tilde{v}_{j+1}^{t+1}}=\tilde{v}_j^{t}\frac{1+(\delta-a)\tilde{v}_{j-1}^{t}}{1-a\tilde{v}_{j-1}^{t}} \tag{4.25}$$

から

$$\tilde{v}_j^t=\exp\frac{V_j^t}{\varepsilon},\qquad \delta=\exp\frac{-D}{\varepsilon},\qquad a=-\exp\frac{-A}{\varepsilon},\qquad \varepsilon\longrightarrow +0 \tag{4.26}$$

とする．$a<0$, $\delta>0$ と見なしている．そして，$(0<)D<A$ の場合を考えて，

$$V_j^{t+1}+\max(0,V_{j+1}^{t+1}-D)-\max(0,V_{j+1}^{t+1}-A)=V_j^t+\max(0,V_{j-1}^t-D)-\max(0,V_{j-1}^t-A) \tag{4.27}$$

と得られた．ここで，

$$\tilde{v}_j^t=\frac{v_j^t}{1+av_j^t},\qquad v_j^t=-\frac{1}{2a}(1+\bar{v}_j^t) \tag{4.28}$$

であったから，

$$\bar{v}_j^t=\frac{a\tilde{v}_j^t+1}{a\tilde{v}_j^t-1}=\tanh\frac{V_j^t-A}{2\varepsilon} \tag{4.29}$$

である．ここで，delay OV model での変数変換

$$g_n(t)=\tanh(h_n(t)-c) \tag{4.30}$$

と比べて超離散変数を

$$g_n(\tau t)=u_n^t=\tanh\frac{H_n^t-C}{2\varepsilon},\qquad h_n(t)=\frac{H_n^t}{2\varepsilon},\qquad c=\frac{C}{2\varepsilon} \tag{4.31}$$

と採ればよい．そこで，

$$a=-\frac{1}{4},\qquad \delta=-\tau, \tag{4.32}$$

$$\tilde{v}_{j-1}^t=\tilde{v}_j^{t-1}\longrightarrow\tilde{u}_n^{t-1},\qquad \tilde{v}_j^t\longrightarrow\tilde{u}_n^t,\qquad \tilde{v}_{j+1}^{t+1}=\tilde{v}_{j+2}^t\longrightarrow\tilde{u}_{n+1}^t \tag{4.33}$$

と置換すると，

$$\tilde{u}_n^{t+1}\frac{1+(-\tau+\frac{1}{4})\tilde{u}_{n+1}^t}{1+\frac{1}{4}\tilde{u}_{n+1}^t}=\tilde{u}_n^t\frac{1+(-\tau+\frac{1}{4})\tilde{u}_n^{t-1}}{1+\frac{1}{4}\tilde{u}_n^{t-1}} \tag{4.34}$$

ただし，

$$u_n^t = \frac{a\widetilde{u}_n^t + 1}{a\widetilde{u}_n^t - 1} = \frac{\frac{1}{4}\widetilde{u}_n^t - 1}{\frac{1}{4}\widetilde{u}_n^t + 1} = \tanh\frac{H_n^t - C}{2\varepsilon} \tag{4.35}$$

より

$$\frac{1}{4}\widetilde{u}_n^t = \exp\frac{H_n^t - C}{\varepsilon} \tag{4.36}$$

である．

ここで，超離散極限を取るために

$$0 < \delta - a = -\tau + \frac{1}{4} \longrightarrow 0 \tag{4.37}$$

という場合を考えて

$$0 < \tau = \frac{1}{4}\left(1 - \exp\frac{-T}{\varepsilon}\right) < \frac{1}{4} \qquad (T > 0) \tag{4.38}$$

と置く．これから

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_n^{t+1}\frac{1 + (-\tau + \frac{1}{4})\widetilde{u}_{n+1}^t}{1 + \frac{1}{4}\widetilde{u}_{n+1}^t} &= \widetilde{u}_n^t\frac{1 + (-\tau + \frac{1}{4})\widetilde{u}_n^{t-1}}{1 + \frac{1}{4}\widetilde{u}_n^{t-1}} \\ \mathrm{e}^{(H_n^{t+1} - C)/\varepsilon}\frac{1 + \mathrm{e}^{(H_{n+1}^t - C - T)/\varepsilon}}{1 + \mathrm{e}^{(H_{n+1}^t - C)/\varepsilon}} &= \mathrm{e}^{(H_n^t - C)/\varepsilon}\frac{1 + \mathrm{e}^{(H_n^{t-1} - C - T)/\varepsilon}}{1 + \mathrm{e}^{(H_n^{t-1} - C)/\varepsilon}}\end{aligned} \tag{4.39}$$

これによって **ultra-discrete OV model**

$$\begin{aligned}&H_n^{t+1} + \max(0, H_{n+1}^t - C - T) - \max(0, H_{n+1}^t - C) \\ &\qquad = H_n^t + \max(0, H_n^{t-1} - C - T) - \max(0, H_n^{t-1} - C)\end{aligned} \tag{4.40}$$

が得られる．

5 まとめ

本研究では，交通流の基本的モデルである最適速度モデルの超離散化を，mKdV 方程式の超離散化に添った形で実現した．これにより最適速度モデルが持つ，mKdV 方程式に近い性質を保ったままセル・オートマトンモデルを得ることが出来た．数値シミュレーションを含めた交通流モデルとしての妥当性は別の論文で発表する予定である [7].

参考文献

[1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, *Phys. Rev.* **E51** (1995) 1035.

[2] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, *J. Phys. I France* **5** (1995) 1389.

[3] D. Takahashi and J. Matsukidaira, *J. Phys.* **A30** (1997) L733.

[4] T. S. Komatsu and S. Sasa, *Phys. Rev.* **E52** (1995)5574.

[5] S. Tsujimoto and R. Hirota, RIMS Kokyuroku **933** (1995) 105.

[6] K. Maruno, K. Kajiwara, S. Nakao and M. Oikawa, *Phys. Lett.* **A229** (1997) 173.

[7] M. Kanai, S. Isojima, K. Nishinari and T. Tokihiro *to appear.*